力学改革
―力が原因で運動が結果だけなのか？―

Innovation of Dynamics
—Only does Force Cause Motion?—

執筆者プロフィール

◎1970～2000年東京工業大学，2000～2010年法政大学，東京工業大学名誉教授，工学博士．
◎研究・専門テーマは，機械力学，CAE
◎正員（名誉員），キャテック（株） 取締役（〒111-0053 東京都台東区浅草橋5-16-3 オカジマビル4F／E-mail：akio_nagamatu@catec.co.jp）

長松 昭男
Akio NAGAMATSU

1. はじめに

各種企業間の激烈な生存競争の中で，機械製品を丸ごとコンピュータ内に再現し企画・設計・試験を通して用いることにより，一貫した開発を行うための，次世代CAEの構築が急がれている．その実現に対する最大の障害は，機械・電気・熱・流体などの異専門分野間を連結し工学を統合するモデル化が困難なことである．

これを解決するにはまず，工学を横断する唯一の概念であるエネルギーの立場から，現在の力学を見直す必要がある．機械工学の拠所である古典力学は，文字どおり力の学問であり，力が原因で運動が結果という片方向の因果関係のみを対象にし，時系列的に閉じたエネルギーの変換・流動が表に出ていない．筆者は現在，この点に注目した古典力学の改革を試みており[1]，以下にその概要を紹介する．

2. 因果関係と状態量

2.1 力が原因で運動が結果だけなのか？

中国の墨子（紀元前400年ごろ）は，「力は物体の状態を変える原因である．」（墨経）と定義している[2]．ニュートンは，「力とは運動と静止の原因的原理である．（手稿：重力と流体の平衡について）」，また「理論力学は，どのような力にせよそれから結果する運動の学問，またどのような運動にせよそれを生じるのに必要な力の学問である．」（プリンキピア）と述べている[3]．ダランベールは，力を「運動の原因」と呼んだ[4]．ラグランジュは「力とは，どのようなものであれ，それが作用していると考えられる物体に運動を起こさせるないし起こさせようとする原因であると理解される．」（解析力学）と記している[3]．

このように古典力学は，その黎(れい)明期から現在に至るまで，時空間に展開し目に見える運動の裏に隠れた原因が存在する，という人間の自然な物の見方に従って発展してきた．人はこの原因を力と名づけ，**「力が原因で運動が結果」**という1方向の因果関係に沿って古典力学は構成されている．

筆者はかねてから，このような在来力学の完結性に対して疑問を抱いてきた．諸行無常・因果応報・万物流転．因は果となり果は次の因となり，森羅万象は輪廻・流転し続ける．この世のすべての因果関係は閉じており，原因のない事象は存在しない．物理事象も例外ではなく，宇宙全体がエネルギーの変換と循環が織りなす閉じた因果関係に従って限りなくまた果てしなく変遷し続けている．在来の古典力学は，時系列的に流転し反復する閉じた因果関係の半面のみを記述しているに過ぎないのではなかろうか？

力の正体は，現在の物理学ではまだ明らかでない[5]．しかし力も物理事象である以上，正体は不明でも原因は必ず存在するはずである．そして，力学の状態量には力と運動しかない以上，力の原因は運動であると考えざるを得ない．

現在の古典力学には，在来とは逆方向の**「運動が原因で力が結果」**の世界が欠落しており，双方向を対等に扱うことによって初めて因果関係は閉じ，エネルギーの流転現象を正しく記述できる力学が完結すると，筆者は考える．

2.2 状態量の双対性

瞬時仕事の表現式$p=fv$は，力fとv速度が力学的エネルギーに関して対等・双対・相補の関係にあることを意味する．このことから，運動を変位ではなく速度で代表するのは，力学的には自然であろう．

ハイゼンベルグの不確定性原理は，通常$\Delta v\cdot\Delta x\geq h/M$（$M$は質量，$x$は位置，$h$はプランク定数）と表現されるが，これは本来の式

$$\Delta p\cdot\Delta x\geq h\ \ (p=Mv\text{ は運動量})\tag{1}$$

に「質量Mは状態量に影響されない不変量である」という古典力学のみで成立する近似を導入したものである．式(1)は，量子力学では力の蓄積（時間積分）である運動量（力積）と速度の蓄積である位置（速度積）が対等・双対・

相補の量として扱われていることを意味する．このことから，力と速度も互いに対等・双対の関係にあると見なせる．

3. 力学特性

3.1　在来の定義

物体の力学特性には，質量・弾性・粘性があり，在来力学では，「力が原因で運動が結果」の因果関係に基づいて，次のように定義されている．

質量：単位加速度を生じる力の大きさ（運動の法則）
剛性：単位変位を生じる力の大きさ（フックの法則）
粘性：単位速度を生じる力の大きさ

変位・速度・加速度は力学特性が機能して生じるから，これらは結果を用いた原因の定義になり，単なる事象の規定にすぎない．またこれらは，力と運動を関係づける比例定数以上の物理的意味を持たない．さらにこれらには，同一物体の特性間の密接な相互関係が記述されていない．

3.2　力学的エネルギーからみた機能

まず力学的エネルギー保存の法則に関与する質量と弾性について述べる．

弾性とは柔らかさである．在来力学では弾性をその逆数である剛性Kとして扱っているが，エネルギーを表に出す場合には弾性を柔性$H(=1/K)$として扱うほうが自然である．これは，物体は剛さではなく柔さでエネルギーを保存するからである．例えば，質量のない物体（虚空）は運動エネルギーを保存できないし，柔性のない物体（剛体）は変形しないから弾性エネルギーを保存できない．また物体は，熱（原子・分子の微小不規則振動の力学的エネルギー）が増加して温度が上昇すると，柔らかくなる．

機械系の固有周期は$2\pi\sqrt{MH}(=2\pi M/K)$で表現される．この式は，力学的には剛性Kではなく柔性Hが質量Mと対等・双対・相補の関係にあることを示唆している．

本節では，「物体は，力学的エネルギーの均衡状態ではそれを維持し，不均衡状態では均衡状態に復帰しようとする．これを演じるのが力学特性である．」という筆者の基本認識に基づいて，質量と柔性の機能を記述する．

質量の静的機能：力学的エネルギーの均衡状態では，力学的エネルギーを速度の形で保存する．

質量の動的機能：力学的エネルギーの不均衡状態では，力学的エネルギーの不均衡分を力の不釣合いの形で受け，それに比例する速度変動（加速度）に変換する．速度変動は，時間の経過とともに速度を変化させる．質量は，この速度の変化分だけの力学的エネルギーを吸収することにより，力の不釣合いを解消し，力学的エネルギーの均衡を回復させる．

柔性の静的機能：力学的エネルギーの均衡状態では，力学的エネルギーを力（内力）の形で保存する．

柔性の動的機能：力学的エネルギーの不均衡状態では，力学的エネルギーの不均衡分を速度の不連続（両端間の相対速度）の形で受け，それに比例する力変動に変換する．力変動は，時間の経過とともに力を変化させる．柔性は，この力の変化分だけの力学的エネルギーを吸収することにより，速度の不連続を解消し，力学的エネルギーの均衡を回復させる．

以上のように質量と柔性の機能は，力と速度，釣合いと連続の言葉の入れ替え以外には同一の文章で記述される．このことは，質量と柔性の機能が力学的エネルギーの変換に関して対等・双対・相補・可逆の関係にあることを意味している．物体は，質量と柔性が協調して力と速度の双方向変換を生じることにより，力学的エネルギーの均衡状態ではそれを維持し，不均衡状態では均衡状態への復帰に向かって状態量を推移させるのである．

質量に力を作用させる（加える）ことはできるが，静止している質量に瞬間的に速度を与えることはできない．質量に加える力は，速度を変動（加速度を発生）させることはできるが不連続に変化させることはできない．

また質量は，力学的エネルギーを速度で保有するから，外部に速度を与えることはできるが瞬間的に力を加えることはできない．質量が接触対象に与えるのは，自分の速度と同一の速度であり力ではない．

このように質量は，力しか受けられず速度しか出せない．「力が原因で速度が結果」の因果関係を演じるのは，力を受けて速度を出す質量なのである．それゆえ在来力学では，物体の本質は質量であるとされていた．

一方，柔性（ばね）に速度を作用させる（両端間に相対速度を与える）ことはできるが，自然長の柔性に瞬間的に力を加えることはできない．柔性に与える相対速度は，内力を変動させることはできるが不連続に変化させることはできない．

また柔性は，力学的エネルギーを力（内力）で保有するから，接続対象に力（復元力）を加えることはできるが瞬間的に速度を与えることはできない．

このように柔性は，速度しか受けられず力しか出せない．筆者が提唱する「速度が原因で力が結果」の因果関係を演じるのは，速度を受けて力を出す柔性である．質量と柔性を対等・双対・相補に扱うことによって初めて，物理事象の閉じた因果関係全体を表現できる力学が完結する．

第3の力学特性である粘性は，歴史的には質量・剛性よりも早くからその存在が指摘されていたが，学問の俎上に乗らないという理由で，現在まで力学の対象外であった．しかし粘性は，エネルギー原理から導かれる線形運動方程式を構成する以上，その発生機構と機能がエネルギー原理に基づいて説明できるはずである．すでに筆者は，この問題を解決しているが[1][6]，本解説では説明を割愛する．

3.3　自由振動

すべての物体内では，力を受けて速度を出す質量と速度を受けて力を出す柔性が，自身の出入が相手の入出になる形で連結して，力学的エネルギーの閉回路を形成している．外作用により投入された不均衡力学的エネルギーはこの閉回路内を循環し続け，力と速度の周期的変化（反復）を生じる．これが自由振動である．

自由振動において，変位振幅が増大する過程では，質量から柔性に力学的エネルギーが流動し速度が力に変換される．一方変位振幅が減少する過程では，柔性から質量に力学的エネルギーが流動し力が速度に変換される．1周期は閉鎖回路内を力学的エネルギーが2往復する時間である．

4. 力学法則

一般に物理法則の正当性は実験と合うかどうかで判断される．もう一つの判断基準は対称性である．自然界は対称であるらしい[5]．たとえば，座標軸を回転してもベクトルの基本法則は変わらない．また，ローレンツ変換に従って空間変数と時間変数を交換しても，相対性理論の基本法則

は変わらない．本章では，これまであまり注目されていなかったこの対称性に基づいて古典力学の法則を論じる．

4.1 力と運動の法則

ニュートンは，「力が原因で速度が結果」の因果関係に基づく次の2法則を提唱した．

慣性の法則：力が作用しない物体は0を含む一定の速度を保有する．

運動の法則：力が作用する物体は作用力に比例する速度変動（加速度）を生じる．

因果関係が閉じ力学法則が対称であるなら，上記とは逆の「速度が原因で力が結果」の因果関係に基づく法則が別に存在するはずである．そこで筆者は，不遜の極みという非難を覚悟のうえで，次の2法則を提唱する．

柔性の法則：速度が作用しない物体は0を含む一定の力を保有する．

力の法則：速度が作用する物体は作用速度に比例する力変動を生じる．

柔性（ばね）に速度を作用させることは，柔性の両端間に相対速度を与えることを意味する．相対速度を与えられない柔性は，自然長で内力を有しないか，外部拘束下で引張または圧縮の一定内力を保有している．相対速度を与えられる柔性は，それに比例する内力変動を生じる．

上記のようにニュートンの法則と筆者の法則は，互いに双対関係にある力と速度の入れ替え以外には同一の文章で記述される．このことは，これら両法則が互いに対等・対称・双対の関係にあり，両者を合わせて初めて因果関係が閉じ，力学法則の対称性が完結すると，筆者は考える．

ニュートンの法則では物体を質量と見なし，慣性の法則は質量の静的機能，運動の法則は質量の動的機能を記述している．運動の法則を式で表現すれば

$$f = M\dot{v} \tag{2}$$

一方，筆者が提唱する法則では物体を柔性と見なし，柔性の法則は柔性の静的機能，力の法則は柔性の動的機能を記述している．力の法則を式で表現すれば

$$v = H\dot{f} \tag{3}$$

式（2）と（3）は，力fと速度v，および質量Mと柔性Hに関して互いに対称・双対の関係にある．

4.2 作用反作用の法則

上記の2法則に続いてニュートンは，作用が力でなされることを前提とする以下の作用反作用の法則を，第3法則として提唱した．

力の作用反作用の法則：作用力に対し反作用力は常に逆向きで大きさが等しい，あるいは2物体間の相互の作用力は常に大きさが等しく方向が逆である．

筆者は作用が速度でなされる場合の次の法則を提唱する．

速度の作用反作用の法則：作用速度に対し反作用速度は常に逆向きで大きさが等しい，あるいは2物体間の相互の作用速度は常に大きさが等しく方向が逆である．

これら両法則は，力と速度の入れ替え以外には同一文章で記述され，互いに対称・双対の関係にあることがわかる．

以下に，速度の作用反作用の法則について説明する．

われわれがいる場において対象に速度を与える（作用させる）ことを対象上にいる観測者から見れば，このことは，われわれがいる場にこの作用速度と逆向きで同じ大きさの速度（反作用速度）を与えることにほかならない．たとえば，場Pにおいて速度vを与えることは，場Pに対して相対速度vを有する場Qを既存の場Pとは別に作りだすことである．このことを場Qから見れば，速度vと逆方向で同じ大きさの速度$-v$を有する場Pを作り出すことになる．これにより場Pは，場Qから逆方向で同じ大きさの速度$-v$を与えられる．

速度の作用反作用の法則は，「互いに一定速度を有する場同士では力学系は変化しない」というガリレイの相対性原理から由来する法則であり，この法則はガリレイの相対性原理の別解釈と見なすことができる．

ここで注意を要するのは，慣性の法則，運動の法則，柔性の法則，力の法則における「作用」と，作用反作用の法則における「作用」は，意味が若干異なることである．前者は力学的エネルギーが不均衡でその流動を伴う場合にのみ成立する作用であり，後者は力学的エネルギーの均衡・不均衡や流動の有無には無関係に常に成立する作用である．また，前者は質量における力の不釣合いまたは柔性における速度の不連続を伴う場合にのみ成立する作用であり，後者は質量・柔性の有無や力の釣合い・速度の連続には無関係に，力・速度が存在すれば必ず成立する作用である．

たとえば，互いに独立した二つの力が質量に加わるとき，それらが逆向きで大きさが等しければ，力は釣り合い，力学的エネルギーは均衡し流動しないから，前者の作用は存在せず慣性の法則が成立する．しかしこの場合にも後者の作用は存在し，二つの作用力のおのおのに対する反作用力が質量から各作用源に加わる．

また，互いに独立した二つの速度を柔性の両端に与えるとき，それらの向きと大きさが共に同一であれば速度は連続であり，柔性は両端間に相対速度を伴わない一様速度移動（剛体運動）になり，力学的エネルギーは均衡し流動しないから，前者の作用は存在せず柔性の法則が成立する．しかしこの場合にも後者の作用は存在し，上記2作用速度のおのおのに対する反作用速度が作用端ごとに別々に生じる．

4.3 運動量の法則と位置の法則

筆者は本節で，運動量の法則と双対の新しい法則を提唱する．運動量の法則は「運動量の変化は力積に等しい」または「運動量の時間変化率は力に等しい」と記述できる．これを式で表せば

$$p(t_2)-p(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} f\,dt \quad \text{または} \quad \frac{dp}{dt}=f \tag{4}$$

法則が対称であれば，運動量の法則と対称・双対の関係にある法則が別に存在するはずである．前述のように，力fと速度v，運動量（力積）pと位置（速度積）xは，それぞれ双対関係にある．上記運動量の法則の記述文中の諸量をそれらの双対量で置き換えれば，「位置の変化は速度積に等しい」または「位置の時間変化率は速度に等しい」という自明の文章になる．これを式で表せば，

$$x(t_2)-x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} v\,dt \quad \text{または} \quad \frac{dx}{dt}=v \tag{5}$$

式（5）は，単なる運動の微積分関係であり，法則と呼ぶにはあまりにも当たり前の式であるが，法則の対称性を明示するためにこれをあえて**位置の法則**と呼べば，運動量の法則と位置の法則は互いに対称・対等・双対関係にある．力の効果が力積（運動量）として現れるのと同様に，速度の効果は速度積（位置）として現れるのである．

また，「速度が作用しない物体の位置は変化しない」という自明のことを**位置保存の法則**と呼べば，これは「力が

作用しない物体の運動量は変化しない」という運動量保存の法則と対称・対等・双対の法則になる.

運動量の法則・運動量保存の法則・位置の法則・位置保存の法則は，力の作用反作用の法則・速度の作用反作用の法則と同様に，力学的エネルギーの保存や均衡とは無関係に，力と速度が存在するあらゆる場で常に成立する，自明で当たり前のことなのである.

4.4　フックの法則の位置づけ

質量が一定であるという仮定の下に運動の法則（式(2)）を時間で積分すれば

$$p\left(=\int f\,dt=\int M\dot{v}\,dt\right)=Mv \tag{6}$$

式(6)は運動量の定義式である.

一方，柔性が一定であるという仮定のもとに力の法則式(3)を時間で積分すれば

$$x\left(=\int v\,dt=\int H\dot{f}\,dt\right)=Hf \tag{7}$$

柔性と剛性の関係式 $H=1/K$ を用いて式(7)を書き換えれば

$$f=Kx \tag{8}$$

式(8)すなわち式(7)は，フックの法則にほかならない．一方，力と速度，運動量と位置，質量と柔性がおのおの互いに双対関係にあるから，式(6)と(7)も互いに対称・双対の関係にある．式(6)～(8)は，これまで無関係と思われていた運動量の定義とフックの法則が，互いに対称・双対の関係にあることを示している．筆者のこの主張により，フックの法則の動力学における位置づけが初めて確立される.

5. エネルギー

5.1　仕事とエネルギー

物体に力が作用してなされる仕事は，作用力 f の位置 x に関する積分として得られ，物体の質量が保有する運動エネルギーの変化に等しい．運動の法則（式(2)）を用いてこれを定式化すれば

$$W=\int_{t_0}^{t}fv\,dt\left(=\int_{t_0}^{t}f\frac{dx}{dt}dt=\int_{t_0}^{t}f\,dx=\int_{t_0}^{t}M\frac{dv}{dt}dx=\int_{t_0}^{t}M\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dt}dt\right)$$
$$=\int_{t_0}^{t}Mv\frac{dv}{dt}dt=\left(\frac{1}{2}Mv^2\right)_{t_0}^{t}=\frac{1}{2}Mv^2-\frac{1}{2}Mv_0^2=T-T_0 \tag{9}$$

在来力学では，もっぱら式(9)で仕事が表現されていた.

筆者は，柔性に速度が作用してなされる仕事の表現式を提案する．この場合の仕事は，速度の運動量に関する積分として得られ，柔性が保有する力エネルギーの変化に等しい．力の法則（式(3)）を用いてこれを定式化すれば

$$W=\int_{t_0}^{t}vf\,dt\left(=\int_{t_0}^{t}v\frac{dp}{dt}dt=\int_{t_0}^{t}v\,dp=\int_{t_0}^{t}H\frac{df}{dt}dp=\int_{t_0}^{t}H\frac{df}{dt}\frac{dp}{dt}dt\right)$$
$$=\int_{t_0}^{t}Hf\frac{df}{dt}dt=\left(\frac{1}{2}Hf^2\right)_{t_0}^{t}=\frac{1}{2}Hf^2-\frac{1}{2}Hf_0^2=U-U_0 \tag{10}$$

剛性 $K=1/H$ とフックの法則 $f=Kx$ を用いて，式(10)の力エネルギーをわれわれが見慣れた形に書き換えれば

$$U=\frac{1}{2}Hf^2=\frac{1}{2}Kx^2 \tag{11}$$

式(9)において，質量 M を柔性 H で，速度 v を力 f で，位置 x を運動量 p で置き換えれば，式(10)になる．これから，これまで相互関係が不明であった運動ネルギーと力エネルギーが，対称・双対・相補の関係にあることがわかる.

在来力学では，力エネルギーは式(8)で表現される外力がばねに作用する結果として，次のように求められていた.

$$W=\int_{t_0}^{t}fv\,dt=\int_{t_0}^{t}f\,dx=\int_{t_0}^{t}Kx\,dx=\left(\frac{1}{2}Kx^2\right)_{t_0}^{t}=U-U_0 \tag{12}$$

式(12)は，式(10)と同一の結果を得るから決して誤りではないが，以下の理由によって若干厳密さを欠く.

一般に外力は，作用対象には無関係に作用源だけで決まるものである．しかし式(8)は，作用対象である柔性（ばね）特有の力学特性である剛性 K と柔性の変位 x に依存するから，作用源で決まる外力ではなくばねの内力であり，同時にばねから外部に作用する復元力に抗してばねを拘束するための拘束力（復元力の反作用力）である．単に力と運動の関係を論じるのではなく力学的エネルギーの変換と流動を扱う際には，因果関係を正しく表現し作用力と反作用力を区別する必要があり，式(8)は厳密には外部からの作用力とは言えない.

5.2　エネルギー・運動量と時間・空間

式(1)に $\Delta x=v\cdot\Delta t$（位置の法則式(5)）と $\Delta p=M\cdot\Delta v$（運動量の定義式(6)）を代入すれば

$$M\cdot\Delta v\cdot v\cdot\Delta t=\Delta\left(\frac{1}{2}Mv^2\right)\cdot\Delta t=\Delta T\cdot\Delta t\geq h \tag{13}$$

一方，同じ式(1)に $\Delta p=f\cdot\Delta t$（運動量の法則式(4)）と $\Delta x=H\cdot\Delta f$（フックの法則式(7)）を代入すれば

$$H\cdot\Delta f\cdot f\cdot\Delta t=\Delta\left(\frac{1}{2}Hf^2\right)\cdot\Delta t=\Delta U\cdot\Delta t\geq h \tag{14}$$

式(13)は運動エネルギーと時間が，式(14)は力エネルギーと時間が，ハイゼンベルグの不確定性原理において対等・双対に扱われていることを示す．このことと運動量と空間が対等・双対に扱われている式(1)を合わせれば，エネルギーと時間，運動量と空間の間にはそれぞれなんらかの関係があるのではないか，という疑問が生じる.

ちなみに物理学では，ローレンツ変換の考えを運動量に当てはめると，三つの空間成分として古典力学における通常の運動量が，第4の時間成分として力学的エネルギーが出てくる[5]．また，エネルギー保存の法則はいつ実験しても同じ結果が得られるという時間的事実と，運動量保存の法則はどこで実験しても同じ結果が得られるという空間的事実と，角運動量保存の法則はどちらを向いて実験しても同じ結果が得られるという事実と，密接に関係している.

一般に物理学では保存される量が大切な役目を持つ．力学で現在知られている保存される量は，エネルギーと運動量である．一方，質量の保存は古典力学のみで成立する近似概念であり，相対性理論では成立しないし[5]，量子力学では質量の意味が古典力学とは異なってくる[5].

6. 釣合いと連続

6.1　力の釣合い

現在，力の釣合いは「1つの物体に（互いに独立した）複数の力が加わっても物体が静止しているか動いていても速度が変化しないとき，力は釣り合っているという[7].」と定義されている．この定義では物体を，力を受けることができる質量であると見なしている．この定義に従う釣合いを「狭義の釣合い」と呼ぶことにする.

この定義を逆に見れば，運動の法則に従って速度変動（加

速度）を生じ速度が変化しながら運動しつつある物体（質量）はすべて，力の不釣合い状態にあることになる．たとえば質量に力が作用するときの

$$f+(-M\dot{v})=0 \tag{15}$$

は，左辺第2項に加速度$\dot{v}$を含むから，明らかに力の不釣合い式である．しかしわれわれは式（15）を，外力と慣性力が釣り合っていることを表現する力の釣合い式と見なしている．

ケルビンは，「静力学は力の釣合を扱い，動力学は物体の運動を生み出すないしは運動を変化させる，釣り合っていない力の効果を扱う[4]」と定義している．この定義は上記と同一の狭義の釣合いである．この定義によれば，動力学における運動方程式はすべて力の不釣合い式になり，力の釣合いは静力学と動力学を問わず力学全体で成立するという一般認識，および力の釣合いから運動方程式を導くという常とう手段，は誤りになる．事実動力学では，力が釣り合っていないからエネルギーが流動し加速度が発生するのである．そしてこれは，「静力学と動力学は力の釣合いによって統一できる.」というダランベールの原理と，明らかに矛盾する．

筆者は，ダランベールの原理を歴史的事実に基づいて詳しく論じ，この重大な問題に対する正しい解を与えている[1]．ここではその詳細は割愛し，以下に簡単に説明する．

まず，ダランベールの名誉のために言うと，彼は，ニュートンの法則（式（2））を書き換えて式（15）を導くことも，式（15）を実在の外力と見かけの慣性力が釣り合う力の釣合い式と定義することも，全くしていない[3][4]．ダランベールの原理はこのような下らないものではない．彼は，単一の質量を対象とする運動の法則だけでは完全には説明しきれない多自由度系の作用・拘束・運動を，この原理によって解き明かそうとした．このことが，ニュートンの法則だけからは決して生まれなかっただろうラグランジュ解析力学の誕生を可能にしたのである．

ダランベールの原理は「釣合の法則」として提唱された[3]．釣合いという概念に関する当時の認識は未分化であり，ダランベールは，上記のケルビンの定義（狭義の釣合い）と4.2で説明した力の作用反作用の法則を合わせたものを,「釣合い」と呼んでいた．これは，彼が著書『力学論』において，接触する2物体間の相互作用（作用反作用）を釣合いの説明に用いていることから[3]，明らかである．力の作用反作用の法則と同義であるダランベールのこの釣合いを，「広義の釣合い」と呼ぶことにする．

作用反作用の法則は力が存在すれば常に成立するから，静力学では狭義と広義の釣合いが共に成立し，動力学では広義の釣合いは成立するが狭義の釣合いは成立しない．したがって静力学と動力学の統一は，狭義の釣合いでは不可能であり，広義の釣合いでは可能である．また，質量に加わる単一力の作用反作用の法則を表す式（15）をはじめ，加速度を含む運動方程式はすべて，狭義の釣合いでは力の不釣合い式，広義の釣合いでは力の釣合い式なのである．

図1に示す多自由度系内の任意の点iに作用する力f_iの総和は，真の作用力とそれに対する反作用力をすべて加えたものになるので，必ず0になる．これを定式化すれば

$$\sum_i f_i = 0 \tag{16}$$

この式は，広義の釣合いを意味し，この点を力学的エネルギーが流動するか否か，または点iに接続されている質量

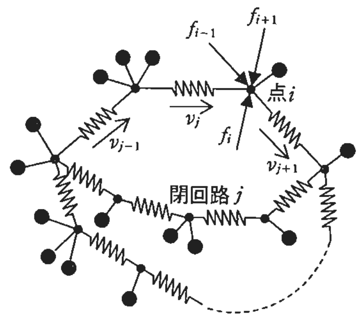

図1　多自由度系

が加速度を有するか否かには関係なく，常に成立する．われわれが運動方程式の導出に用いる力の釣合い式は，式（16）である．

「釣合い」の意味を物理学的に厳密に規定するのは狭義の釣合いであり，われわれが力の釣合い則と称する式（16）はあまねく成立する広義の釣合いである．力の釣合いに関する上記の問題は，これら2種類の釣合いを混同して使っているために生じたものであり，両者を区別することによって解決できる．

6.2　速度の連続

筆者は速度の連続を「一つの物体に（互いに独立した）複数の速度が加わっても物体が内力を有しないか有していても内力が変化しないとき，速度は連続しているという.」と定義する．この定義では物体を，速度を受けることができる柔性であると見なしている．

この定義を逆に見れば，力の法則に従って力変動を生じ力が変化しながら伸縮しつつある物体は，すべて速度の不連続状態にあることになる．これを「狭義の連続」という．

一方，**図1**の多自由度系内の任意の閉回路j内の全点の速度の総和は，回路が閉じているから，ガリレイの相対性原理により力学的意味を有しない剛体変位速度を無視すれば，必ず0になる．これを定式化すれば

$$\sum_j v_j = 0 \tag{17}$$

この式は，この閉回路内を力学的エネルギーが流動するか否か，また閉回路を構成する柔性に内力変動が生じているか否かに関係なく，あまねく成立する．われわれは式（17）を速度の連続則と呼んでいる．これを「広義の連続」という．

狭義の釣合いと狭義の連続，および広義の釣合いと広義の連続は，それぞれ互いに対称・双対の関係にある．

ちなみに，広義の力の釣合いは電気学におけるキルヒホフのノード則と,広義の速度の連続はループ則と対応する．

7. 慣性力

式（15）に対しては，次の2通りの解釈が存在する．

［1］運動の法則を表現する式（2）を移項して得られる式

式（2）は力学法則であるから，その構成項はすべて実在する力である．それを移項しただけで実在しない見かけの力に変わるわけはないから，式（15）左辺第2項の$-M\dot{v}$は，第1項のfと同様に実在する力である．しかし，現実に存在する力はfのみであり，それから独立した他の力はどこにも存在しない．これはどういうことだろうか．

力$-M\dot{v}$は，力fが作用すると同時に必ず生じ，力fが

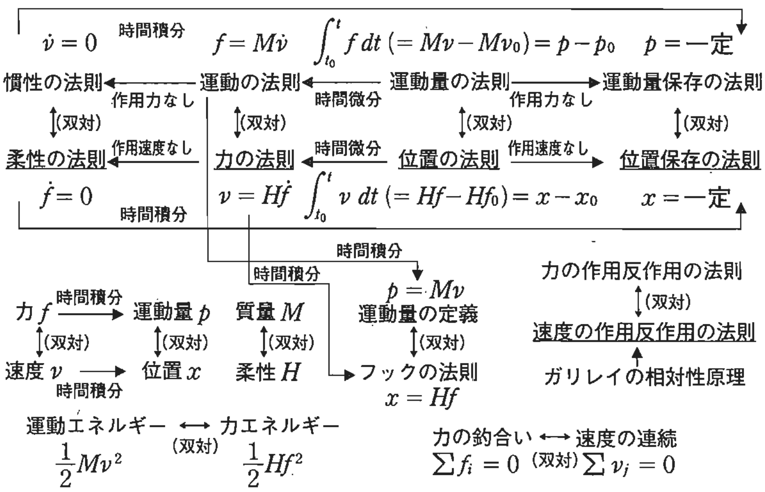

図2　力学における概念と法則の関係

作用しなくなると同時に必ず消滅し，大きさと方向が力 f によって一義的に決まる．このことは，力 $-M\dot{v}$ が力 f から独立した力ではなく，作用力 f を受ける質量がその動的機能（3.2参照）によって生じる反作用力であることを意味する．つまり式（15）は，質量特有の力の作用反作用の法則の表現式であり，同一の力を片方だけ符号を逆転させて足せば0になるという，自明の式である．われわれは力 $-M\dot{v}$ を慣性力と呼んでいる．この慣性力は実在するから，その反作用力も実在し，それは作用力 f にほかならない．

［2］加速度 $\dot{v}$ で運動する質量を同一の加速度 $\dot{v}$ で運動する運動座標系上の観測者から見るときの，見かけの式

この観測者には，実作用力 f とは別に，大きさが同一で逆向きの力 $-M\dot{v}$ があたかも存在して作用し，これら2力が釣り合って質量が静止しているように見える．しかし，実際には力 f 以外の力はどこにも存在せず，力の釣合いは成立していないから，質量は加速度 $\dot{v}$ で増速し続ける．

この場合の式（15）を，「見かけの力 $-M\dot{v}$ を導入すれば力が釣り合う」という動力学における力の釣合い式である，と説明するのは，誤りである．実在の力と実在しない見かけの力を加えることは，数式上では可能であるが，実現象としては不可能である．また，実現象を支配する力学法則を表現する力の釣合い式を構成する力に，実在しない力を含めることはできない．さらに，非慣性系でしか成立しない式（15）を普遍の法則と呼ぶことはできない．

われわれはこの力 $-M\dot{v}$ をも慣性力と呼んでいるが，これは上記（1）における実在の慣性力とは全く異なるものである．この場合の慣性力は実在しない見かけの力であるから，反作用力を持たない．筆者は，大きさと方向が同じというだけで，意味が異なる上記2力を同一名称で呼ぶのは紛らわしく，また慣性系では現れず慣性の法則が成立しない非慣性系（加速度を有する運動座標系）のみにおいて現れる見かけの力を慣性力と呼ぶことには若干抵抗を感じるので，この見かけの力を「疑似反力」と呼んでいる．

力が作用する質量には加速度が生じ，同時に慣性力が反作用力として必ず発生し実在する．これと同一の加速度で運動する運動座標上の観測者からこの質量を見れば，実在する慣性力とは別に，それと大きさと方向が共に同一の疑似反力が，あたかも存在するように見えるのである．

8. 概念と法則の関係

図2は，力学における概念と法則の相互関係を示す．下線を付したものは筆者が提唱する法則群，それ以外のものは在来の古典力学における法則群である．

本図上部の法則群のうち，上段は質量が演じる「力が原因で運動が結果」，下段は柔性が演じる「運動が原因で力が結果」の因果関係を規定しており，これら上下段の両法則群が並存して初めて，物理事象の因果関係は閉じる．

運動量の法則と位置の法則，それらを時間微分した運動の法則と力の法則は，互いに双対・相補の関係にある．作用が存在しない場合には，運動の法則と力の法則はそれぞれ慣性の法則と柔性の法則に，運動量の法則と位置の法則はそれぞれ運動量保存の法則と位置保存の法則になる．したがって，慣性の法則と柔性の法則，運動量保存の法則と位置保存の法則は，互いに双対・相補の関係にある．物体を質量と見るときには慣性の法則と運動量保存の法則が，柔性と見るときには柔性の法則と位置保存の法則が，本質的には同一になる．

本図下部は，力と速度が，それらを時間積分した運動量と位置が，力学特性である質量と柔性が，それぞれ双対・相補の関係にあることを示す．また，運動量の定義とフックの法則が，力の作用反作用の法則と速度の作用反作用の法則が，運動エネルギーと力エネルギーが，力の釣合いと速度の連続が，それぞれ双対・相補の関係にあることを示す．

在来の法則群に筆者が提唱する法則群を加えることにより，全法則が整然と関係し，閉じた因果関係の下で対称な力学世界が形成されることが，**図2**から理解できると思う．

（原稿受付　2009年12月9日）

●文　献
（1）長松昭男，機械の力学，（2007），朝倉書店．
（2）三輪修三，機械工学史，（2000），丸善．
（3）山本義隆，古典力学の形成，（1997），日本評論社．
（4）山本義隆，重力と力学的世界，（1981），現代数学社．
（5）Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M.L.，坪内忠二訳，ファインマン物理学Ⅰ　力学，（1967），岩波書店．
（6）長松昭男，エネルギー原理による粘性の発生メカニズム，自動車技術，**63**-7（2009），56-61．
（7）高等学校教科書，新編物理Ⅰ，（2005），東京書籍．