

乱流熱伝達の解析

東京工業大学工学部助教授 吉田英生
東京工業大学工学部教授 土方邦夫

1. まえがき

乱流の数値解析は層流の場合と比較すると格段に困難になる。この理由は、乱流では大小さまざまな渦が発生と消滅を繰り返し、かつそれらが不規則な運動をしているため、その数値計算に際しては、非定常かつ3次元のNavier-Stokes方程式を、流れの中に存在する(物理的に重要性のある)最小の渦についても分解能が得られるよう、細かい格子を用いて計算する必要があるからである。すなわち

(3次元) × (非定常) × (細かい格子) → 膨大な計算量

となるので、このような数値計算はコンピューターの能力が圧倒的に向上して初めて可能になる。層流の場合には当然とも考えられるNavier-Stokes方程式の直接数値シミュレーション(DNS)が、乱流においても可能になったのは最近のことである。歴史的には、乱流の性質をなんらかのモデルを用いて記述する方法から先に発達してきた。

壁面摩擦応力や熱伝達率の予測だけを目的とした古典的な計算手法はここでは割愛することにして、乱流場全体を対象とする数値計算法は、以下の3通りに大別される。

①乱流モデル

②大渦シミュレーション(LES), あるいはSGS (subgrid scale) モデル

③直接数値シミュレーション(DNS)

となり、②は、物理的にも、計算量においても、①と③の中間に位置する。各方法の発展の歴史と現状を表1にまとめて示す。

表1 数値計算法の発展の歴史と現状

①乱流モデル

1970年前後に Imperial College の Bradshaw, Spalding, Launder, Jones, Rodi, Hanjalić らが現在のモデルの骨格をつくったが、現在でもモデルの改良が続けられている。最もポピュラーな計算法として確立し、汎用パッケージソフトに数多く採用されている。

②大渦シミュレーション(LES), あるいはSGS (subgrid scale) モデル

当初は気象学の分野で開発されたが、工学分野では Deardoff, Schumann, Moin, Kim らが中心となり70年以後に発展した。計算格子よりも小さいスケール(subgrid scale)の渦に対してはモデル化を行うが、大きな渦については3次元非定常計算を行う。チャンネル流れに対する Moin & Kim らの計算(1982)での格子点数は 516,096。

③直接数値シミュレーション(DNS)

Kim, Moin, Moser, Spalart など Stanford と NASA Ames 研究所を中心に開発されてきた。有意な渦の全てに対し分解能が保証されるように格子を細かくとり、文字通り直接計算を行う。Kim らのチャンネル流れに対する計算(1987)の場合、格子点数3,962,880で、CRAY-XMPを使ってCPU timeは250時間。それでも、まだレイノルズ数は低く3300程度である。乱流の基礎研究のための強力なツールとして、DNSによるデータベース構築が現在進められている。

実際的な応用においては、時間平均の壁面摩擦応力や熱伝達率、さらには乱れ強度の分布などがわかれば十分なことが多く、乱流モデルが使用されることがほとんどである。したがって、本講習会でも、対象を乱流モデルに限定する。

2. レイノルズ方程式と完結 (closure) 問題

以下では、時間平均値を大文字、変動値を小文字で表し、 $\bar{\quad}$ は時間平均を表す。

次から次へと生まれては消えてゆく渦を追いかけてゆくのも一つの乱流研究のあり方として重要であるが、乱流を理解する上で基礎となるのは時間平均の諸特性である。そこで、Navier-Stokes 方程式を時間平均することによって、次式のようなReynolds方程式が得られる。(なお、以下では問題を簡単化するため、非圧縮性で定常の場合だけを考える。)

$$\frac{DU}{Dt} = U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{uv} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{uw} \right) \quad (1)$$

$$\frac{DV}{Dt} = U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial x} - \overline{uv} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial y} - \overline{v^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial z} - \overline{vw} \right) \quad (2)$$

$$\frac{DW}{Dt} = U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial W}{\partial x} - \overline{uw} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial W}{\partial y} - \overline{vw} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial W}{\partial z} - \overline{w^2} \right) \quad (3)$$

式(1)~(3)は、層流に対するNavier-Stokes 方程式と似かよっているが、右辺に変動速度の2次の相関の時間平均量があらわれている。これは、もとをたざせば左辺の対流項からでてくるのだが、左辺から右辺に移項されて、しかも1階微分の中に入っている。これらをレイノルズ応力(Reynolds stress)と呼ぶ。応力というと、材料力学や層流を対象とする流体力学になじんだ人たちには、ひずみやひずみ(変形)速度と関係づけられないと落ち着かないかもしれない。しかし、これは、後述するように、層流における分子粘性による応力と同等の作用(拡散作用)を及ぼす立派な応力なのである。

温度場に対しても同様な時間平均された式を考えることができる。エネルギー方程式を時間平均することにより、以下のような変動速度と変動温度の積からなる乱流熱流束(turbulent heat flux)があらわれる。これは、運動方程式におけるレイノルズ応力に対応している。

$$\frac{D\Theta}{Dt} = U \frac{\partial \Theta}{\partial x} + V \frac{\partial \Theta}{\partial y} + W \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \overline{u\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \overline{v\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \overline{w\theta} \right) \quad (4)$$

レイノルズ応力がない場合、すなわち層流の場合であれば、式(1)~(3)はそれぞれ、 U 、 V 、 W を未知数とする輸送方程式と考えられるので、連続の式と連立させて解くことにより速度と圧力の分布が得られる。しかし乱流の場合には、レイノルズ応力という未知数が新たに加わっているため方程式系が閉じていない。

それならば、レイノルズ応力に対する輸送方程式を導けば良いと考えるかもしれないが、そこにはさらに変動量の高次(3次以上)の相関が現れる。このように乱流の時間平均された輸送方程式を導出し続けても、深みにはまるだけで、方程式群は永遠に閉じないという宿命にある。これを悪循環と呼ぶなら、多少強引なことをしてでもそれを断ち切ろうとするのが人の性である。そこでこれらの相関をモデル化し、近似的ではあるけれども方程式群を閉じさせようとする努力が、“乱流モデル”の開発につながった。乱流モデルのことを完結(closure)と呼ぶ背景には、以上のような理由があるのである。

(補足) 運動方程式に限らず、一般の輸送方程式(左辺の実質微分の中に入っている物理量の輸送を支配する方程式)において、その右辺に空間の1階微分にくるまれて現れる項は拡散(diffusion)項とよばれる。では拡散項と呼ばれる理由を考えてみよう。図1のような2次元噴流を例として、流れ方向の運動方程式

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{uv} \right) \quad (5)$$

の両辺を $0 \leq y \leq \infty$ で空間的に積分すると、

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} U^2 dy + [UV]_0^{\infty} = \left[v \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{uv} \right]_0^{\infty} = 0 \quad (6)$$

となり、右辺は0となる。すなわち右辺の項は、局所的には応力のこう配に従って運動量を変化させるが、全体的には寄与がない(相殺される)ような性質がある。このように領域内における物理量の配分に関与する項を拡散項と呼び、これが物理量の分布を均等化する方向にあることは、放物型の拡散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (\text{上に凸の部分は減少傾向, 下に凸の部分は増加傾向}) \quad (7)$$

の解が

$$C(t, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{y^2}{4Dt}\right) \quad (8)$$

となり、図2のような時間変化となることを考えれば容易に理解できるであろう。

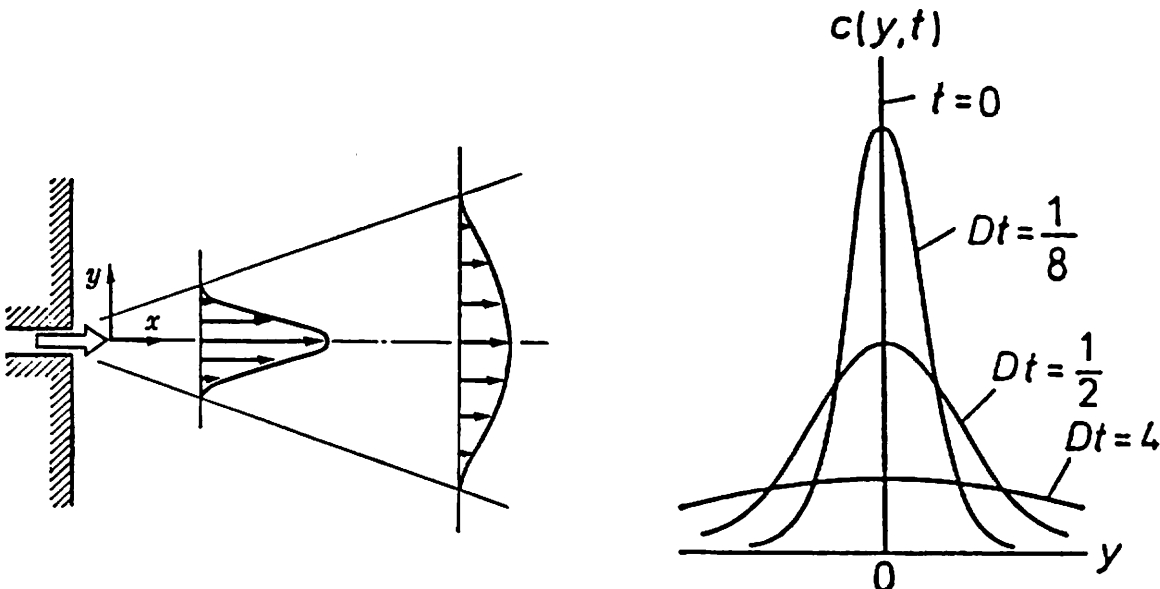


図1 2次元噴流

図2 2次元拡散方程式の解

3. 乱流モデル

3. 1 渦動粘性係数とプラントルの混合距離モデル

式(1)~(3)にあらわれたレイノルズ応力をまとめると

$$\begin{pmatrix} -\overline{u^2} & -\overline{uv} & -\overline{uw} \\ -\overline{uv} & -\overline{v^2} & -\overline{vw} \\ -\overline{uw} & -\overline{vw} & -\overline{w^2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

のような9要素(対称性から実質6種類)からなるテンソルを形成する。このうち、対角要素である $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$ は2乗の量であるので常にある大きさを有するが、非対角要素は異なる2方向の変動速度間の積であるので必ずしも値(相関)を有するとは限らない。

では、一見したところ他人通しの組合せと思われる非対角要素が相関を有するのはどんな場合であろうか？ 答えを先に述べると、それは、一般に、関係する2方向に平均速度のこう配(変形速度)が存在する場合である。

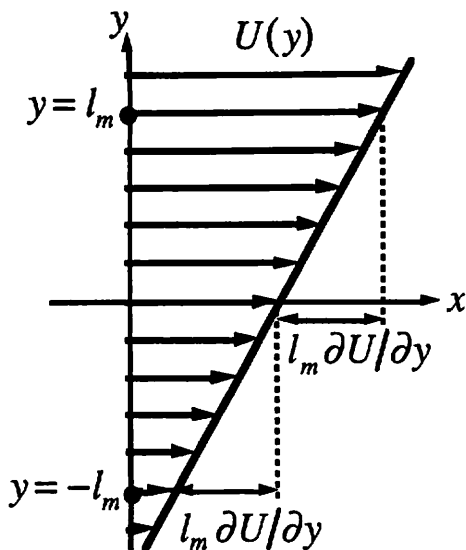


図3(a) 速度こう配と速度変動

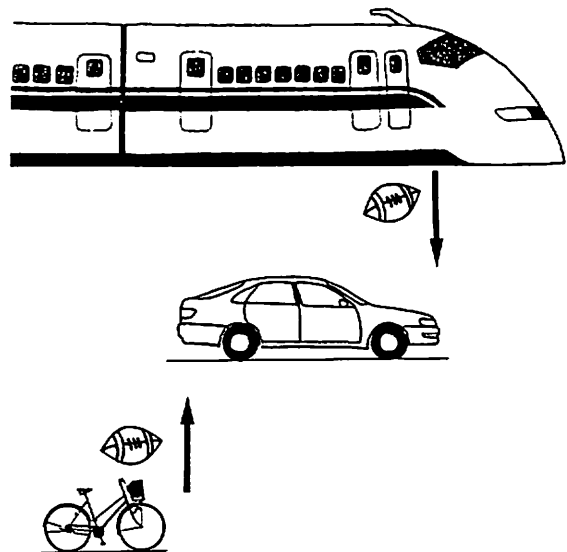


図3(b) レイノルズ応力のイメージ

このことを説明したものが図3である。すなわち、図3(a)のような平均速度のこう配(x 方向速度の y 方向微分)があるときには u と v の時間平均には相関があることを、例え話を用いて直感的に説明しよう。図3(b)のように、東海道新幹線と車(東名高速道路)と自転車(国道1号線)が並走していると仮定し、ついでに新幹線の窓も開くと仮定しよう。いま3者間でラグビーボールのサイドパスを行うことを想定すると、車を中心と考えた場合、新幹線から渡されるボールは $u > 0$, $v < 0$ で、一方自転車から渡されるボールは $u < 0$, $v > 0$ で、何れの場合も積 $-uv > 0$ となる。しかし、もし新幹線と車が徐行運転中で自転車と同じ速度で走行していたら、 $-uv = 0$ となるだろう。このことから非対角要素は速度こう配と密接に関係しそうだと察しがつく。さらに、このサイドパスが及ぼす力学的効果を考えると、相対的に速い新幹線からパスされたボールにより車は加速され、逆に遅い自転車からパスされたボールにより車は減速される。両者の効果は逆方向なので相殺される方向にあるが、新幹線-自動車の速度差と自動車-自転車の速度差とが異なれば、実

質的な寄与がなされる。このことを運動方程式(1)中で明確に示しているのが、右辺第2項レイノルズ応力の一階微分(レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ のy方向の変化)である。

以上から非対角要素は、速度こう配(変形速度)と関係しており、速度分布を均一化する(運動量を拡散する)物理的作用を有していることが理解できたと思う。このように考えると、レイノルズ応力は分子粘性による応力と共通性があるので、Boussinesq (1877) は変形速度との間に粘性応力と相似な次のような関係を仮定した。

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{i,j} \quad (10)$$

ここで ν_i は渦動粘性係数(eddy viscosity)であり、 $[m^2/s]$ の次元を有する一種の拡散係数である。また、 k は後に式(17)で定義される乱流エネルギーである。クロネッカーのデルタのついた右辺第2項は、変形速度がない場合に、垂直応力(応力テンソルの対角要素)が等方的(isotropic, $\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}$)となることを仮定するもので、また総和規約(テンソル記法で、同じ添字が2度現れたときに1から3まで和をとることを適用した場合に両辺が恒等的に等しくなることを保証するためにも付加してある。乱流熱流束についても同様に

$$-\overline{u_i \theta} = a_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (11)$$

の関係を仮定し、 a_i を渦温度伝導率という。通常は乱流プラントル数 σ_θ (場の関数とせず一定値0.9程度と仮定することが多い)を導入することにより

$$a_i = \frac{\nu_i}{\sigma_\theta} \quad (12)$$

のように渦動粘性係数で置き換えることがよく行われる。

式(10)を式(1)~(3)に代入することにより両辺は平均速度成分で表現されるので、渦動粘性係数 ν_i さえわかれば方程式系は閉じることになる。ここでようやく、我々は問題の核心に到達した。すなわち、

渦動粘性係数 ν_i をどのように与えるか？

粘性係数が物性値であるのに対し、渦動粘性係数は場に依存する値である。この渦動粘性係数を定量的に評価するために、物理的洞察力の優れたPrandtl (1925) は混合距離(mixing length)の概念を導入した。再び図3(a)のせん断層を考える。渦の代表的な寸法を l_m とし、運動量の交換がこのスケールで行われるとする。y=0における速度変動を考える。y= l_m からやってくる流体塊は $l_m |\partial U / \partial y|$ だけの速度差をもっている。したがって、このとき生じるx方向の速度変動は $u = l_m |\partial U / \partial y|$ であり、y方向の速度変動 v も同程度と考えられる。y= $-l_m$ からやってくる場合についても同様の議論が成立するので、これらの時間平均値に相当するレイノルズ応力 $-\overline{uv}$ は

$$-\overline{uv} \propto \left(l_m \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (13)$$

とモデル化され、渦動粘性係数は式(10)と(13)より

$$\nu_i \propto l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (14)$$

となる。

ここで混合距離として用いられる長さとしては、渦の代表寸法が流れによって変化することに対応して、流れに応じて適切な与え方が検討されている。その中でいちばん有

名なのが、壁近傍における混合距離 l_m を

$$l_m \equiv \kappa y \quad (15)$$

とおくものである。ここで κ はカルマン定数で0.42である。実際問題として、乱流境界層において混合距離は図4のように与える。ただし上式は、壁近傍とはいったものの、粘性の影響がおよぶ壁の近傍(後述の無次元座標 $y^+ = y\sqrt{\tau_w/\rho}/\nu < 30$)までは適用できない。この領域も含めて渦動粘性係数をうまく与えることができるように改良を加えたのがVan Driest (1956)であり、次式ようになる。

$$l_m = \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{A} \frac{y\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu}\right) \right] \quad (16)$$

ここで $A=26$ である。このモデルの基礎となる考え方は、振動する平板近傍の周期的流れ(図5)の解であり、平板が静止して流体が振動している現象と、壁乱流とは相対的には変わらないのではないかと洞察したのである。

このように混合距離が規定されると、渦動粘性係数は速度こう配との積で表されるので、基礎方程式群は解けることになる。なお、式(15)におけるカルマン定数 κ は計算結果が実測値とよく一致するように決定されている。以下においても、乱流モデルに関して多くの係数がでてくるが、それらは実測値とベストフィットするように決定されることが多い。(一部の係数は理論的に定められる。)

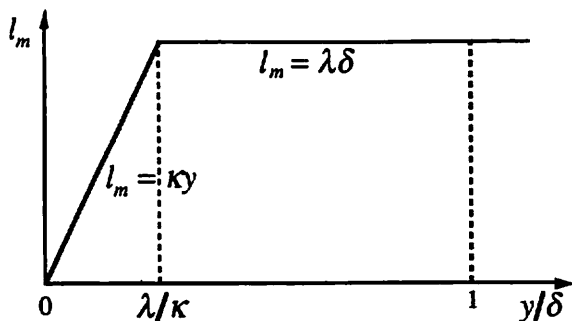


図4 混合距離の分布

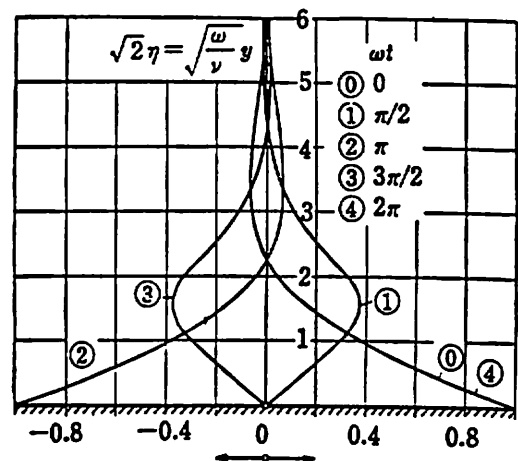


図5 振動平板近傍の流れ

3. 2 次元的にみた渦動粘性係数と n 方程式モデル

ここで渦動粘性係数を次元的な立場から考えてみよう。前述したように、渦動粘性係数は次元 $[m^2/s]$ を有しており、これは渦(乱れ)の代表速度(かき混ぜる速度)とその代表長さ(かき混ぜる腕の長さ)の積であるとも考えられる。したがって、式(14)では代表速度として $u = l_m |\partial U / \partial y|$ 、代表長さとして l_m を選んだとも解釈することができる。

渦動粘性係数をもっと一般的に考えると、次元解析的に乱流の特性量(乱れのスケール l や、後述する乱流エネルギー k や散逸 ϵ など)を組み合わせ、 $[m^2/s]$ の次元を作りだせばよい。この目的で乱流特性量に対する輸送方程式を n 個解くモデルを n 方程式モデルと呼ぶ。上述の混合距離モデルでは、 ν_t を壁からの距離に比例する長さ(輸送方程式を計算する必要のない量)で与えていることから、0方程式モデルと呼ばれる。

以下で説明する1~2方程式モデルでは、乱流エネルギーや後述する散逸などに対する輸送方程式を解くけれども、渦動粘性係数を求めようとする点では、0方程式モデル

と何ら変わるところがない。すなわち、1~2方程式モデルにおいても、消極的な目的としては、渦動粘性係数を与えることによってレイノルズ方程式を完結させることにある。ただし、積極的な目的としては、輸送方程式を解くことによって、その乱流エネルギーや散逸などの空間分布を求めることにより、乱流場の詳細を予測することにあることは言うまでもない。

3.3 1方程式モデル

0方程式モデルでは渦動粘性係数における代表速度として $l_m|\partial U/\partial y|$ を選んだが、本節では、乱れの代表速度を与えるのに、適当な微分方程式を解くことを考えよう。なお以下では、議論を簡単にするために、方程式系としては通常の2次元境界層形の流れ(固体壁はあってもなくてもよい)を考えよう。これにより対流項($U\partial/\partial x$)以外の時間平均量に対する x 微分はすべて無視できて式がスッキリする。

式(9)で対角要素 $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$ は、レイノルズ応力というより、むしろ3方向の変動エネルギーと考えた方がわかりやすいかもしれない。つまり、流体は時間平均的な運動に加えて流れ方向にも垂直方向にもスパン方向にも振動運動をしており、その時間平均値をあらわしたものがそれぞれ $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$, $\overline{w^2}$ である(図6)。変動速度ベクトルの絶対値を q とすると、その2乗の時間平均値の半分を乱流エネルギー(turbulent kinetic energy) k とよぶ。

$$k \equiv \frac{\overline{q^2}}{2} = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) \quad (17)$$

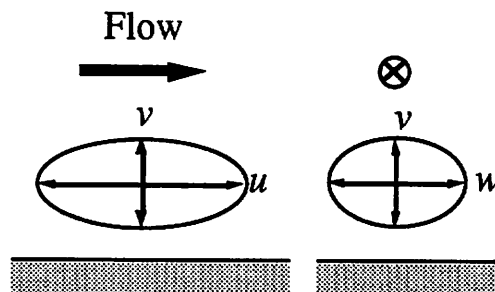


図6 3方向の変動エネルギー

本節では、この乱流エネルギー k の平方根こそが乱れの代表速度として適当であると考えるのである。乱流エネルギー k の輸送方程式は、瞬間の速度 $U_i + u_i$ に対する方程式からレイノルズ方程式を差引いた上で、変動速度 u_i を乗じた後、3方向の和をとればよい。この演算操作を記号で略記すると、

$$\sum_{i=1}^3 \overline{\left\{ \left[\frac{D}{Dt}(U_i + u_i) - \frac{D}{Dt}U_i \right] \times u_i \right\}} \quad (18)$$

となり、その結果

$$\frac{Dk}{Dt} = U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[- \left(k + \frac{p}{\rho} \right) u_j \right] - \overline{u_j u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (19)$$

(乱流拡散) (生成) (粘性による仕事) (粘性散逸)

となる。各項の意味を説明する前に、乱流エネルギーの輸送方程式を、できるだけシンプルな形で示したいので、若干の式変形を先に行おう。式(19)の右辺第3項と第4項をまとめて演算操作を施すと

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[- \overline{\left(k + \frac{p}{\rho} \right) u_j} \right] - \overline{u_j u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (20)$$

(乱流拡散) (生成) (分子拡散) (等方性粘性散逸)

のように変形される。式(20)は、このままでは添字がうるさいので、2次元の境界層近似で書き直すと次式のようなになる。

$$\frac{Dk}{Dt} = U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[- \overline{\left(k + \frac{p}{\rho} \right) v} \right] - \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} - \nu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (21)$$

(乱流拡散) (生成) (分子拡散) (等方性粘性散逸)

右辺第1項は1階微分にくるまれているので、前述した理由により拡散項となる。ここで、右辺の第2項がなぜ生成項であるかを理解するには、乱れにとって母なる大地に相当する平均流に対するエネルギー輸送方程式をあわせて考えるとよい。境界層近似形では、

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{U^2}{2} \right) = U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2}{2} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U^2}{2} \right) = - \frac{U}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (-U\overline{uv}) + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (22)$$

となり、式(22)の右辺第3項は式(21)の右辺第2項と符号が逆になっている。すなわち、この項は平均流と乱れとの間のエネルギーの授受を表しており、通常は式(21)では正、式(22)では負の寄与をなす。すなわち、乱れは母なる大地(平均流)から栄養を吸い取って成長し、逆に大地(平均流)は栄養を吸い取られて痩せてゆくのである。

動粘性係数 ν の乗せられた式(21)の右辺第4項と式(22)の右辺第4項は、ともに常に負の量であるため、それぞれ乱流エネルギー(力学エネルギー)と平均流のエネルギー(力学エネルギー)を減少させる作用を有する。この点をもう少し深く考えてみよう。エネルギー方程式(4)を厳密に表現すると、

$$\frac{D\Theta}{Dt} = U \frac{\partial \Theta}{\partial x} + V \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{v\theta}) + \frac{1}{c} \left[\frac{\Phi}{\rho} + \epsilon_{total} \right] \quad (23)$$

となり、右辺に非負の関数 Φ と ϵ_{total} がある(ここで c は比熱)。まず、 Φ は平均流に対する粘性散逸関数と呼ばれ、

$$\frac{\Phi}{\mu} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial y} + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right]$$

$$= 2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \geq 0 \quad (24)$$

となる。一方、 ε_{total} は式(19)の右辺第4項に他ならず、乱流成分に対する粘性散逸関数であり、

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{total}}{\nu} &\equiv \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \\ &= 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

となる。つまり、これらは力学エネルギーを熱エネルギーに変換する不可逆過程を意味する。通常の場合これらの散逸項は式(23)では無視できる場合が多いが、自動車のトルクコンバーターやフリクションプロワでの発熱はこの作用が顕著になったものである。これに対し、乱流の力学的エネルギーの収支を示す式(19)において、散逸は絶対無視することができない。そこで、乱流を対象とする場合に散逸といえは、式(19)の右辺第4項のことをさす。

式(20), (21)の右辺第4項、すなわち

$$\varepsilon \equiv \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (26)$$

を等方性散逸としたのは、式(25)の第1行右辺を展開した場合、その第2項は等方性乱流の場合にゼロとなり、第1項だけが残るためである。逆にいうと、式(26)で定義される散逸 ε は、式(25)で定義される ε_{total} との差分だけ、非等方性(せん断)乱流に対しては真の粘性散逸とはならない点に注意する必要がある。しかし、実際問題としては、壁近傍の極めて非等方性が強い領域を除いては、 ε と ε_{total} との差は小さく、乱流モデルで散逸という場合は ε を示すことが多い。(いわゆる局所等方性の仮説を適用している。)

(補足) 乱流エネルギーの収支を考える上で、生成項と散逸項は非常に重要である。乱流エネルギーを人間の体重 W に例えるならば、生成項は体外からのinput(食事)に、散逸は体外へのoutputに相当し、もし運動等によるカロリー消費がないとするならば、これら入出量の差が体重の増減につながる。すなわち、 $dW/dt = (\text{input}) - (\text{output})$ という方程式が成立する。

体内で食物を咀嚼・消化する作用は、運動方程式中における非線形慣性項(乱流エネルギーの輸送方程式には陽には現れない)の作用により行われる。これを式で表すと、最初に波数 k_w

$$u = u_0 \sin(k_w x) \quad (27)$$

のような周期的な速度変動があった場合、非線形慣性項により

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0^2 k_w}{2} \sin(2k_w x) \quad (28)$$

となり、波数が2倍の速度変動が生まれることで説明される。このプロセスは次から次へと渦を細かくしてゆくので、energy cascadeと呼ばれている。散逸は、変動速度の空間微分の積で表されることからわかるように、小さい渦で優勢となるので、エネルギースペクトル上では図7のように波数の小さい領域から大きい領域へのエネルギー伝達が生じている。つまり、食事に相当する生成項はレイノルズ応力と変形速度が存在すれば瞬間的に機能するのに対し、散逸項は咀嚼・粉碎過程の時間経過を経た現象である。

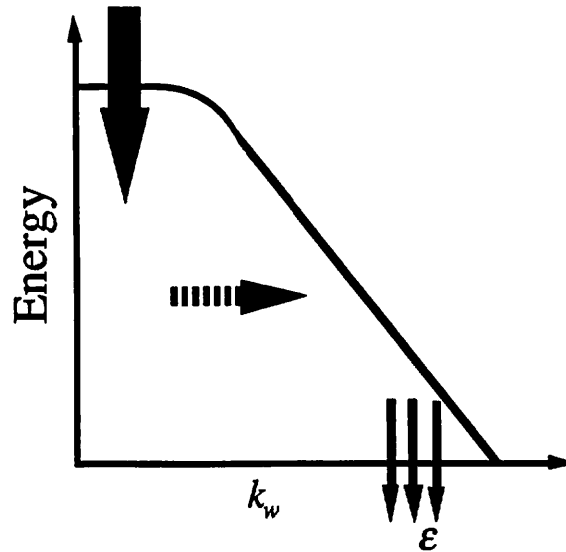


図7 エネルギースペクトル

乱流エネルギーの輸送を支配する式(20)の右辺にはあらたな物理量が含まれているため、これを閉じさせるためにはモデル化を行う必要がある。そこで項別に考えよう。

●拡散項

通常の拡散方程式を考えると、物理量は自分自身の1階微分(こう配)の微分(すなわち2階微分)にしたがって拡散する。乱流拡散の場合にも同様であるとする考え方をこう配拡散仮説という。ただし、その時の拡散係数は先に導入した渦動粘性係数と関係づけられ、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[- \left(k + \frac{p}{\rho} \right) v \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \quad (29)$$

とする。ここで σ_k は乱流エネルギーに対する乱流プラントル数であり、通常1.0が用いられる。このようなこう配拡散モデルは実際の現象を良好に記述する場合も多いが、状況によっては全く逆の現象、逆こう配拡散も起こり得ることが実験的に確認されており、問題となっている。

●生成項

この項は、レイノルズ応力と変形速度の積であるので、渦動粘性係数を与えることが、生成項をモデル化することにつながる。渦動粘性係数は、乱流エネルギー k の平方根と、大部分のエネルギーを有する渦(energy-containing eddy)のスケール l の積に比例すると考えられるので

$$v_i = C_\mu \sqrt{k} l \quad (30)$$

となり(Kolmogorov-Prandtl の式と呼ばれる)、生成項は

$$-uv \frac{\partial U}{\partial y} = v_i \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = C_\mu \sqrt{k} l \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (31)$$

と表される。

●散逸項

散逸 ϵ は $[m^2/s^3]$ の次元を有するので、次元解析的には乱流エネルギー k と乱れの代表長さ l を用いて

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad (32)$$

とモデル化される。前述したように散逸は主として高波数(小さい渦)領域における現象であるので、式(32)で大きな渦に対応する長さが用いられているのは、意外に思われるかもしれない。あるいは、もっと意外に思われるのは、式(32)に粘性係数がでてこないことかもしれない。これは次のような理由による。散逸はエネルギースペクトル上では確かに高波数領域(小さい渦)の現象であるが、その過程は低波数領域(大きな渦)から伝達されてくるエネルギー量に律速されているからである。人間とのアナロジーで表現すると、咀嚼過程が後の消化・吸収過程を律速していて、食物のかたまりがどれぐらい大きい(固いか)ということが支配因子となるといえよう。

以上をまとめると(ただし、粘性拡散は無視する)

$$\frac{Dk}{Dt} = U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + C_\mu \sqrt{kl} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad (33)$$

となり、式(33)は乱流エネルギー k と乱れの長さスケール l で記述できたので、先の混合距離モデルの場合と同様に l を規定してやれば、方程式系は閉じることになる。

この機会に、輸送方程式を解くことの意義を明瞭な形で示そう。輸送方程式を解く長所は、対象とする物理量の分布が対流や拡散によって変化する影響を考慮できるという点にある。したがって、逆に、輸送方程式から対流項や拡散項を省略すれば輸送性のない結果が得られるであろう。そこで、式(33)で対流項と拡散項を無視した場合を考えると

$$v_i \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = C_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad (34)$$

となる。これは、生成項と散逸項がバランスしていることを示す式であり、ここに式(30)を代入して k を消去すると、次式のようになる。

$$v_i = \left(\frac{C_\mu^3}{C_D} \right)^{1/2} l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \propto l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (35)$$

驚いたことに、これは先にでてきた混合距離モデルに他ならない。つまり、混合距離モデルは、乱流エネルギーが対流によっても拡散によっても輸送されない極限的な場合に対応していたのである。

ついでにもう一つ重要なことを付け加えておこう。いま対流項と拡散項を無視した場合を考えたが、これは決して特殊な状況を仮定したのではなく、壁乱流にとってはごくありふれた状況なのである。例えば乱流境界層を考えよう。流れ方向の変化が緩慢なために対流項は小さい。乱流エネルギーの y 方向分布も、壁極近傍を除けば近似的に一樣とみなせるので拡散項も無視しうる。したがって、生成=散逸の条件が成立し、局所平衡(local equilibrium)となる。ちょうど適度な食事が体重を一定に保つようなものである。

3. 4 2方程式モデル

前節の終わりの部分で輸送方程式を解くことの意義を理解していただけたと思うが、輸送方程式の重要さがわかればわかるほど、1方程式モデルは中途半端に感じられるだろう。というのは、1方程式モデルでは渦動粘性係数を与える際に、代表速度には輸送

方程式を解いた結果を使っているのに、代表長さには予め局所的に決められた結果を用いるからである。画竜点睛を欠くといえよう。したがって、1方程式モデルの次の段階としては、長さスケールに対しても輸送方程式を解くような2方程式モデルが考えられる。

実際問題として2つめの乱流特性量(当面の間 z とする)は、長さスケールそのものである必要はなく、前述の乱流エネルギーと組み合わせたときに長さの次元を作り出せば十分である。それゆえ、第2の乱流特性量の選択には自由度があり、例えば $z=k^{\alpha}l^{\beta}$ とするとき $k^{3/2}l$, kl , $k^{1/2}l$, kl^2 などが考えられる。(実際問題として、長さスケール l そのもの、すなわち $\alpha=0$, $\beta=1$ に対する輸送方程式を解くことはない。これは、長さスケールは層流では ∞ となり、このような発散性を有する物理量は数値計算には不適當であるためである。) この中でポピュラーなのは、何といても(等方性)散逸 $\varepsilon=k^{3/2}l$ である。散逸は $[m^2/s^3]$ の次元を有するので、渦動粘性係数を表すには

$$v_t = C_{\mu} \sqrt{k} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = C_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (36)$$

とすればよい。ここで $C_{\mu}=0.09$ である。乱流エネルギーの輸送方程式は、式(33)から次のようになる。

$$\frac{Dk}{Dt} = U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon \quad (37)$$

散逸の輸送方程式は、変動速度 u_i に関する輸送方程式を x_i について微分し、その両辺に $2v \partial u_i / \partial x_i$ を乗じた後に、レイノルズ平均すればよい(Hanjalic & Launder, 1976)。

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & -2v \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}} - 2 \overline{\left(v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} \right)^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k \varepsilon} + \frac{2v}{\rho} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial p}{\partial x_l} - v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) \\ & - 2v \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 2v u_k \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l}} \end{aligned} \quad (38)$$

この式をみたとき、多くの人は絶望的な気持ちにおそわれる。というのは、右辺にあらわれた項はすべて、未だ人類が測定さえしたことがない項ばかりなのである。(ただし、最近のDNSの結果から、これらの項は定量的に評価できるようになった。)そして、これらの項の物理的な意味がいかに理解しにくいかは、かのLaunderらが散逸に関する論文を発表した(Hanjalic & Launder, 1972)ものの、その記述を後続の論文で訂正したことがある(Launder, Reece & Rodi, 1975)という事実からも感じ取っていただけよう。しかし、乱流モデル開発に対する欲求は、このような障害に屈するものではなかった。散逸に対する輸送方程式は一挙に次のようにモデル化されるのである。

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_t}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (39)$$

ここで、 $C_{\varepsilon 1}=1.44$, $C_{\varepsilon 2}=1.92$, $\sigma_{\varepsilon}=1.3$ となる。人類に挑戦するかのよう屹立していた散逸の輸送方程式は、いとも簡単にされてしまった。これを英知とみるか、蛮勇とみるかは、意見の分かれるところだろうが、Imperial Collegeの面々の英知であると思ってよいだろう。式(39)は大ざっぱに言えば、乱流エネルギーの輸送方程式を ε/k 倍したものに相当する。このようなモデル化の背後にある考えは、乱流現象は局所平衡からそう外れるものではないということなのである。すなわち、乱流エネルギーの生成が大きいと

きは、散逸も大きい、したがって散逸の生成も大きいということになる。

散逸の式は強引にモデル化されたような印象を与えるが(確かにそういう面はなきにしもあらずなのだが)、この式を用いた2方程式モデルが、現在最も広く使われ、完ぺきではないまでも良好な成果を挙げていることは、疑うべくもない事実である。障害に直面したときに、ともすれば弱気になりがちな我々として学ぶ点が多いと思う。なお以上の説明では、散逸の輸送方程式のモデル化がいかにも確固たる学問的基盤を持たないように受け止められる恐れがある。これは誤りであり、厳密な学問的アプローチが一方で進んでいることも付記しておこう。

乱流エネルギー k と散逸 ε の二人の主役がそろったところで、重要なことを一つ。乱流エネルギー k と散逸 ε はそれぞれ $[m^2/s^2]$ と $[m^2/s^3]$ の次元を持つので、 k/ε は時間の次元になる。つまり k/ε は乱流の特性時間をあらわす。ここで、さらに生成=散逸の局所平衡を仮定すれば、

$$C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon, \quad \frac{k}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{C_\mu}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{-1} \propto \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{-1} \quad (40)$$

となり、乱流の特性時間は代表的な速度こう配の逆数として見積ることができる。

3. 5 壁乱流に適用する場合の境界条件

基本的な乱流モデルが一応でそろったところで、それらを壁乱流に適用する場合境界条件について説明しておこう。今までに示した乱流モデルでは、分子粘性による拡散項を無視したり、散逸に関して局所等方性を仮定したことからも明らかなように、十分にレイノルズ数が高い乱流領域で有効である。より厳密には、乱流レイノルズ数が十分に高いといった方がよい。ここで乱流レイノルズ数とは、渦の代表速度と代表寸法に基づいて次式のように定義される。

$$R_t \approx \frac{\sqrt{kl}}{\nu} \approx \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \approx \frac{v_t}{\nu} \quad (41)$$

すなわち、乱流レイノルズ数は、渦動粘性係数と動粘性係数の比とも考えられる。また、壁乱流において壁からの距離を摩擦速度 u_τ と動粘性係数でスケーリングした無次元座標

$$y^+ \equiv \frac{yu_\tau}{\nu}, \quad \text{ここで } u_\tau \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \equiv \sqrt{-\overline{uv}_{max}} \propto \sqrt{k} \quad (42)$$

も、乱流レイノルズ数の1種であり、式(41)の乱流レイノルズ数と内容的にはほぼ等価である(ほぼ比例関係にある)。この意味で、上述の乱流モデルは、 $y^+ > 30$ のいわゆる完全乱流層でのみ有効である。したがって、境界条件を壁で与えて、乱流モデルを粘性底層やバッファ層まで適用することには問題がある。

この問題をさけるために、通常は対数法則接合という方法を用いる。これは、壁にいちばん近い格子点が、完全乱流域に属するように壁から十分離れたところに設けることを特徴とする。そして、壁乱流では対数速度分布(図8参照)

$$U^+ \equiv \frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{yu_\tau}{\nu} \right) + 5.5 \quad (43)$$

や、前述の局所平衡(式(34)参照)が実現していることを仮定して、これらの関係を満たすように摩擦速度や乱流諸量を繰り返し計算で決定するのである。摩擦速度というもの

が突然未知数としてあらわれたことに、戸惑いを感じる人もいるだろうが、この量は乱流エネルギーや散逸と密接に結び付いているので、計算が収束するまでは未知数であり、したがって収束するまでは境界条件を与える点の無次元座標も定まらないのである。境界条件を与える点に関する諸量に添え字 p を付けて、対数法則から導かれる関係式を表すと以下ようになる。

$$y = y_p, \quad k_p = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon_p = \frac{u_\tau^3}{\kappa y_p} \quad (44)$$

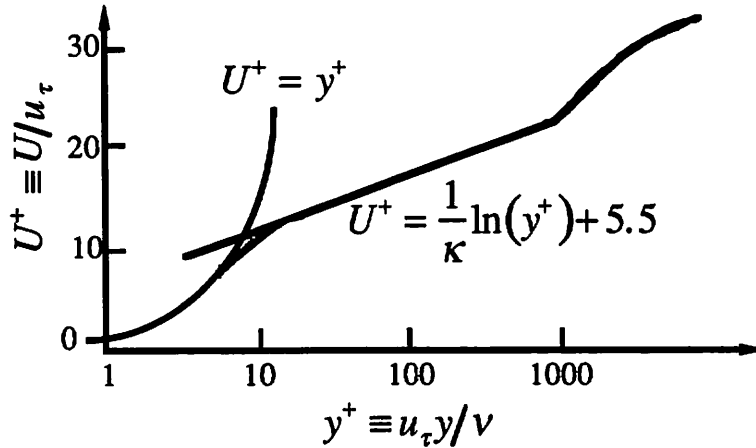


図8 壁乱流の速度分布（線形則と対数則）

3. 6 低レイノルズ数モデル

境界条件の項を読んでガッカリした読者も少なくないだろう。幾つもの輸送方程式を解くといっても、境界条件となると、本当に普遍性が有るのか無いのかわからない(実際のところ普遍性はない)ような対数法則や局所平衡を使っているのだ。

それでは、このような対数法則の制約を克服した乱流モデルはないものだろうか？
 答えは、そのような試みはある、しかし完ぺきではない、とするのが正しいだろう。その試みというのが、いわゆる低レイノルズ数モデルと呼ばれる壁まで適用可能な乱流モデルである。すなわち、境界条件を本来の要求どおり壁面上で与えることができ、粘性底層における漸近挙動をも予測しうるようなモデルである。なお、ここでの低レイノルズ数の意味は壁近傍の意味があるのはもちろんであるが、流れそのもののレイノルズ数が低い(つまり層流に近い流れの)意味も含んでいる。低レイノルズ数モデルには、現在数多くのversionが提案されているが、ここではそれらの先駆となったLaunderらのモデルを紹介しよう。

$$\frac{Dk}{Dt} = U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + v_i \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \quad (45)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} v_i \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + 2\nu v_i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \quad (46)$$

$$v_i = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (47)$$

ここで、下線部が新たに付加された部分であり、関数は局所乱流レイノルズ数を用いて以下のように表される。

$$f_1 = 1.0, \quad f_2 = 1.0 - 0.3 \exp(-R_t^2), \quad f_\mu = \exp[-2.5/(1 + R_t/50)] \quad (48)$$

境界条件は

$$y=0 : U=0, \quad k=0, \quad \varepsilon=0 \quad (49)$$

である。真の散逸 ε_{total} は壁上でゼロでない有限値を持つが、境界条件の容易さから式(49)のように等方性散逸 ε を与えることとし、その代わりに式(45)の右辺第4項が付加されている。

3. 7 レイノルズ応力方程式モデル

0方程式から出発した乱流モデルも、次第に方程式の数が増加してきた。これから述べようとするレイノルズ応力方程式モデルは、多方程式モデルと呼ばれ、2方程式モデルの延長としての性格も強い。しかし、それらの間には歴然たる差がある。というのは、レイノルズ応力方程式モデルでは、渦動粘性係数を用いず、レイノルズ応力そのものを輸送方程式から求めるからである。

では、渦動粘性係数を用いない狙いはどこにあるのか？ 渦動粘性係数は分子粘性からの類推により導入されたやや荒っぽいモデルなのだが、そのわりには2方程式モデルなどによる予測はますますだった。ただ、渦動粘性係数の概念を用いては絶対に正しく予測できないような流れがあることも事実である。それはどういう場合かという、速度こう配(変形速度)が0の点とレイノルズ剪断応力が0の点とが一致しない場合であり、身近な流れでは壁噴流(図9)が挙げられる。このような流れに対しては、渦動粘性係数と変形速度の積でレイノルズ応力を与える方法は無力であり、そのような拘束条件のないレイノルズ応力方程式モデルには明確な優位性がある。(ただし、2方程式モデルよりも本来レベルの高いと考えられるレイノルズ応力方程式モデルが、常に最良の予測を与えるものではないことも事実であり、事態は複雑である。)

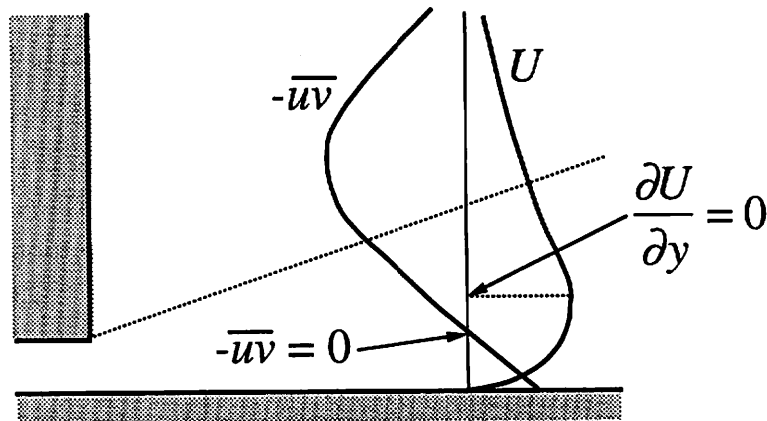


図9 壁噴流(速度勾配と渦動粘性係数のゼロ点が一致しない流れ)

レイノルズ応力方程式モデルと2方程式モデルとのもう一つの違いは、2方程式モデルでは、暗に等方性の仮定($\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$)がなされているので、乱れの方非等方性が大きい流れでは正確な予測は望むべくもないのに対し、レイノルズ応力方程式モデルでは非等方性を予測しうる可能性があるということである。

とにかく、まずレイノルズ応力の輸送方程式を導いてみよう。これは変動速度 u_i に対する輸送方程式に u_j を乗じた式と、変動速度 u_j に対する輸送方程式に u_i を乗じた式を加えてレイノルズ平均することによって得られる。

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\overline{u_i u_j u_k} - \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] \right\} - \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] \\ & \text{(拡散)} \qquad \qquad \qquad \text{(生成)} \\ & - 2\overline{v} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ & \text{(散逸)} \quad \text{(圧力変形速度相関)} \end{aligned} \quad (50)$$

レイノルズ応力には6要素(9要素のうち独立なのは6要素)があるが、2次元の境界層流れにおいて関心のあるのは、3方向の法線応力と、剪断応力である。そこでまず、法線応力について具体的に書き下ろすと以下ようになる。

$$\frac{D\overline{u^2}}{Dt} = U \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u^2 v}) - 2\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2}{\rho} \overline{p} \frac{\partial u}{\partial x} - 2\overline{v} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad (51)$$

$$\frac{D\overline{v^2}}{Dt} = U \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{v^3} - 2\frac{\overline{vp}}{\rho} \right) + \frac{2}{\rho} \overline{p} \frac{\partial v}{\partial y} - 2\overline{v} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} \quad (52)$$

$$\frac{D\overline{w^2}}{Dt} = U \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{w^2 v}) + \frac{2}{\rho} \overline{p} \frac{\partial w}{\partial z} - 2\overline{v} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad (53)$$

実は、これらの3式を加えて2で割ったものが、先に説明した乱流エネルギーの輸送方程式に相当するわけで、その内訳が遅ればせながらわかったことになる。特に注目すべきは生成項で、これは流れ方向成分 $\overline{u^2}$ にしかない。これに反して散逸は、3方向成分すべてにあり、形も対称性を有している。散逸は小さい渦における現象なので方向性もほとんどない(厳密にはコルモゴロフの局所等方性理論に基づく)ことを想起すると、各方向成分の散逸は乱流エネルギーの散逸の2倍を3等分して $(2/3)\epsilon$ と与えられる。

それでは、生成項のない $\overline{v^2}$ と $\overline{w^2}$ はどのようにして自分の生命を維持させているのか？ 答えは、耳慣れない項である圧力変形速度相関(pressure-strain correlation)にある。この項が先の乱流エネルギーの輸送方程式にはあらわれなかったのは、3方向の和をとると連続の式によって0になったからなのである。つまり、この項は3方向全体で考えたときには寄与がないのに、各成分に対しては寄与がある。(これと若干似ているのが拡散項で、拡散項の場合には、空間全体で考えたときには寄与がないのに、局所的には寄与がある。) いったみれば、圧力変形速度相関項は互助会組織のようなもので、 $\overline{u^2}$ が摂取したエネルギーを他の2成分に分配している。この項が別名、再配分(redistribution)項、等方性への緩和(return to isotropy)項と呼ばれるのは、その平等的性格に根ざしているのである。

次に剪断応力について考えよう。式(50)で $i=1, j=2$ とすると、輸送方程式は次式のようなになる。

$$\frac{D\overline{uv}}{Dt} = U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-u \left(v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right] - \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2v \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (54)$$

剪断応力 \overline{uv} には生成項があり，速度こう配 $\partial U/\partial y$ と y 方向の法線応力 $\overline{v^2}$ の積となっている．この生成項は，前述のレイノルズ応力が生じる理由(図3参照)から考えても，理解しやすい．すなわち，速度こう配 $\partial U/\partial y$ が存在する流れにおいて流体塊が y 方向に変動することが，レイノルズ応力の発生につながるのである．

以上で2次元の境界層流れにおいて重要な4つのレイノルズ応力の紹介がすんだので，ここで，これらの間のエネルギーのバランスを(特に壁乱流の場合を想定して)，図10にまとめておこう．これらのレイノルズ応力を家族に見立てるなら， $\overline{u^2}$ は父， $\overline{w^2}$ は可もなく不可もない長男， $\overline{v^2}$ は親孝行の次男， \overline{uv} は母(良妻)ということになるだろう．父 $\overline{u^2}$ は良妻に励まされながら仕事をして収入を得る．父 $\overline{u^2}$ はその収入の一部を，長男 $\overline{w^2}$ と次男 $\overline{v^2}$ に仕送りする．長男 $\overline{w^2}$ はその金をただ使いきるだけだが，賢明な次男 $\overline{v^2}$ は学業に打ち込み母を喜ばせる．そして妻(母) \overline{uv} は，また内助の功で夫を支えるというフィードバックがかかり，家計のバランスが保たれるのである．

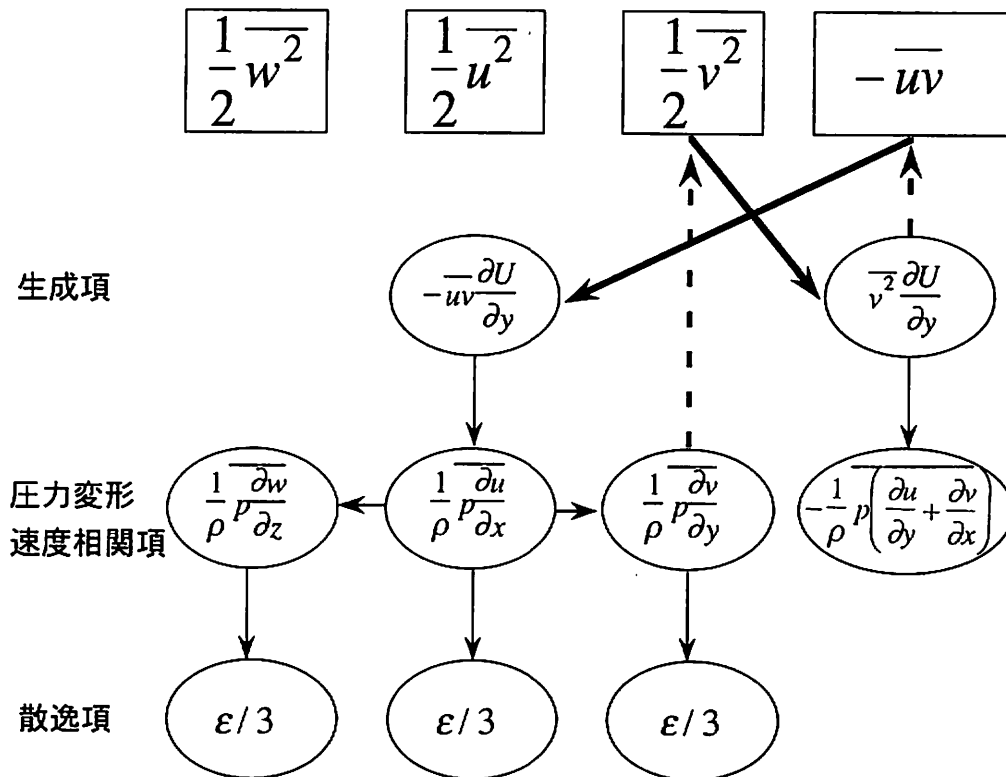


図10 壁乱流のバランス(乱流家族の生計維持機構)

さて，レイノルズ応力方程式のモデル化においては，圧力変形速度相関の扱いが中心的課題として，従来からいちばん問題とされてきた部分である．なにぶん，圧力には方向性がなく楕円型のポアソンの式に支配されることから，モデル化の過程は複雑で，得られたモデルも研究者により異なる．そこで，最も一般的でかつ理解しやすいモデルをここでは紹介する．

$$\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - \gamma \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (55)$$

(変動速度間の相互作用) (平均速度と変動速度間の相互作用)

ここで、 p は乱流エネルギーの生成項、 P_{ij} はレイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ の生成項である。第1項は変動速度間の相互作用に対応する項であり、各成分の等方性からのずれに比例する率で等方化することを示している。この項には乱れの特性時間の逆数が乗じてあるように理解してもよいが、散逸 ε に無次元の緩和率 $[\overline{u_i u_j}/k - (2/3)\delta_{ij}]$ が乗じてあると考えた方が理解しやすい。一方、第2項は平均速度と変動速度間の相互作用に対応する項であり、生成テンソルが等方化することをモデル化したものである。これらのモデル化した項においても、対角成分を3つ足し合わせると消える必要があることはいうまでもない。

生成項は、レイノルズ応力と変形速度の積なのでモデル化の必要はない。一方、散逸の方はどうであろうか？ 先に乱流エネルギーの輸送方程式でも述べたように法線応力の場合には、散逸は2乗の量から構成されていたが、剪断応力の場合には、異なる方向の速度成分を微分したものの積から構成されている。散逸に参与するような小さい渦領域に対しては、乱れは局所等方的と考えられる。換言すれば、方向性がないため異なる速度成分間(およびそれらの微分間)に相関がなくて当然と考えられる。したがって、散逸に関しては

$$2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (56)$$

となる。

拡散項には、変動量の三次の相関が現れており、これは冒頭にも述べたように完結問題に関わる始末のわるい量である。そこでレイノルズ応力を用いて、基本的には乱流エネルギーの場合と同様に、こう配拡散仮説に基づいて

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\overline{u_i u_j u_k} - \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] = C_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} + \overline{u_j u_i} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} + \overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right] \quad (57)$$

とモデル化する。

以上を総合すると式(50)は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = C_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} + \overline{u_j u_i} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} + \overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right] - \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] \\ - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \delta_{ij} \frac{2}{3} k \right) - \gamma \left(P_{ij} - \delta_{ij} \frac{2}{3} P \right) \end{aligned} \quad (58)$$

2次元境界層方程式でおなじみの \overline{uv} について書き下すと以下のようになる。

$$\frac{D\overline{uv}}{Dt} = U \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} = 0.11 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right] - \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} - 1.5 \frac{\varepsilon}{k} \overline{uv} + 0.6 \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (59)$$

レイノルズ応力方程式モデルでは渦動粘性係数を用いないので、乱流エネルギーと散逸の輸送方程式も若干変わって以下のようなになる。

$$\frac{Dk}{Dt} = U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = 0.09 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - \varepsilon \quad (60)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0.07 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\overline{uv}}{k} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (61)$$

4. 計算例

1 (TURBMIX.BAS)

平行平板間の乱流を混合距離モデルにより求めたものであり、求まった速度分布、抵抗係数が従来の経験式と比較される(図11)。

2 (TURBHI.BAS)

平行平板間の乱流を高レイノルズ数モデルで求めたものであり、求まった速度分布、抵抗係数が従来の経験式と比較される(図12, 13)。

3 (TURBLOW.BAS)

平行平板間の十分発達した乱流をLaunderのモデルにより計算したものであり、その結果を計算例1, 2と比較していただきたい(図14～16)。

4 (TBPIPE.BAS)

円管内の乱流熱伝達を速度の助走区間を含めて、管入口から計算したものであり、流れが発達する様子が良くシミュレートされている。管断面内の圧力勾配が一定であると仮定しているために、半径方向の運動方程式は解かれていない。各計算点での速度と圧力勾配を未知数とし、差分化によりもとまった代数方程式をマトリックス演算により解いている。熱エネルギーの式は、乱流プラントル数を一定として演算を行っている(図17～21)。